

O średniej rocznej temperaturze w Warszawie w ujęciu falkowym

1. Wstęp

Ostatnia dekada w klimatologii naznaczona była licznymi publikacjami, w których badacze z całego świata próbowali określić, chociażby w przybliżeniu, istotne cykliczności zjawisk i procesów klimatycznych. Sprzężenia pomiędzy klimatycznymi procesami zewnętrznymi i wewnętrznymi oraz interakcja i koincydencja procesów wewnętrznych powodują, że odczytanie informacji lub innymi słowy: analiza sygnału w procesie jest bardzo skomplikowana, a uzyskane wyniki są wysoce niejednoznaczne (Pruchnicki, 1999). Powszechnie uznane są okresy wahań dobowych i rocznych, co do których przyczynowości nie ma wątpliwości, jednak inne dłuższe cykliczne nie mają już tak oczywistego fizycznego uzasadnienia. Zagadnienie jest dyskusyjne z kilku przyczyn: problemów natury statystycznej związanych z obiektywizmem przy ocenie istotności cykli, określeniem roli składowej losowej zakłócającej informację o sygnale (Rao 1994; Boryczka 1998; Walanus 1997; Węglarczyk 1998), właściwości określonej metody użytej do wyłuskania zasadniczej informacji klimatycznej (Węglarczyk 1998; Fortuniak 1999; Feliks 2001; Węglarczyk, Feliks 2001) i wreszcie przyrodniczego uzasadnienia wykrytych okresów, tzn. udzielenia odpowiedzi na pytanie, czy wyróżnione cykle rzeczywiście istnieją i czy mają sens przyrodniczy (Kožuchowski 1985; Jeż i in. 1987; Kożuchowski, Boryczka 1997; Żmudzka 1999).

W dobie szybkich komputerów możliwe stało się efektywne wykorzystanie metod analizy danych, które wymagają dokonania wielu czasochłonnnych obliczeń na danych oraz opracowanie nowych metod wyodrębniania oscylacji okresowych, ukrytych w losowej zmienności zjawisk przyrodniczych. Metody te bazują na analizie harmonicznej i metodzie widmowych gęstości. Wyniki uzyskiwane za pomocą tych metod charakteryzują się dużą ilością wykrywanych cykli oraz ich różnorodnością. Ponadto warunkiem poprawnego ich stosowania jest stacjonarność badanych serii czasowych. Ten warunek jednak w praktyce jest często pomijany, bądź czynione jest milczące założenie o stacjonarności (w każdym aspekcie) analizowanego szeregu czasowego.

Tych ograniczeń pozbawiona jest nowa technika analizy szeregów czasowych stosowana pod kątem detekcji ich cykliczności – analiza falkowa. Wykorzystuje ona specjalnie skonstruowaną funkcję – nazwaną falką – o skończonej długości i określonej liczbie oscylacji, która jest ścisłkana i rozciągana dając w efekcie rodzinę funkcji, aby następnie zgodnie z ustalonym planem dopasować je do danych rzeczywistych.

Analiza falkowa opiera się więc na pomiarze korelacji pomiędzy poszczególnymi elementami rodziny falek, a badaną serią czasową w całym okresie obserwacji.

Bardzo ważną właściwością nowej metody jest ograniczoność w czasie nośnika oscylacji – jądra przekształcenia – którego odpowiednikiem w analizie fourierowskiej była funkcja sinus rozciągająca się od minus do plus nieskończoności. Dawało to możliwość precyzyjnego ustalenia częstotliwości obecnej w sygnale, ale kosztem zerowej wiedzy o czasowych właściwościach tego cyklu. Analiza falkowa uzupełnia tę istotną lukę w informacji o cyklicznej naturze procesu. Otrzymujemy w efekcie obraz kompletny, ponieważ oprócz faktu wykrycia cykli (bądź ich braku) dostajemy również ich lokalizację w czasie (obserwacji).

2. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest przedstawienie nowej metody analizy szeregów czasowych: analizy falkowej (wavelet analysis) lub zamiennie – falek. Szczegółowe pokazanie algorytmu, a zwłaszcza praktycznej jego strony, ma na celu łatwe zapoznanie się ideą pracy falek, pewnych konsekwencji wynikających z ustalenia początkowych parametrów pracy oraz pułapek, jakie mogą pojawić się w trakcie analizy. Ze względu na praktyczne ujęcie zagadnienia matematyka towarzysząca falkom została zminimalizowana. Podane zostały jedynie podstawowe właściwości determinujące sposób działania nowej metody, które stanowią interesujące uzupełnienie pracy Fortuniaka (2004). Czytelnik pragnący pogłębić teoretyczną wiedzę o falkach w odpowiednich ustępach tekstu odesłany zostanie do opracowań innych autorów.

Skuteczność analizy falkowej zaprezentowana została na przykładzie 220-letniego ciągu średnich rocznych temperatur powietrza w Warszawie. Bogactwo informacji uzyskanej za pomocą falek implikuje możliwość zróżnicowania wizualizacji wyników. Także ten aspekt stanowi kolejny cel opracowania.

3. Analiza falkowa – szkic teoretyczny

Powszechnie znana z fizyki zasada Heisenberga znalazła także swoje odbicie w analizie sygnałów i po zaadoptowaniu brzmi w dużym uproszczeniu: dokładne określenie częstotliwości obecnej w sygnale przy równoczesnym dokładnym zlokalizowaniu jej w czasie jest niemożliwe. Ograniczenie to stało się wyzwaniem dla badaczy różnorodnych dyscyplin – jak zmodyfikować aktualne podejście analizy sygnałów, aby możliwe było uchwycenie efektów lokalnych. Rozwiązanie problemu polega na takim podzieleniu sygnału na części, aby możliwym było ujęcie informacji w dziedzinie częstotliwości jak i czasu. Istotna jest odpowiednia rozdzielczość w dziedzinie czasu i częstotliwości, czyli możliwość jednoczesnego odczytania informacji o okresie, ale i jego ulokowaniu w analizowanym odcinku czasu. Ta idea stała się fundamentem nowego sposobu analizy danych, nazwanego falkami (ang. wavelets).

Fundament analizy falkowej stanowią odpowiednio dobrane funkcje bazy, które posiadają ustalone właściwości lokalizacyjne. Zależą one od „rozciągnięcia” ich w czasie i częstotliwości. Proces „rozciągania” nazywany jest skalowaniem. Skalowanie

daje nam możliwość wyboru dobrej rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości (określenie długości cyklu), kosztem rozdzielczości w dziedzinie czasu (zlokalizowanie cyklu w czasie analizy) i odwrotnie.

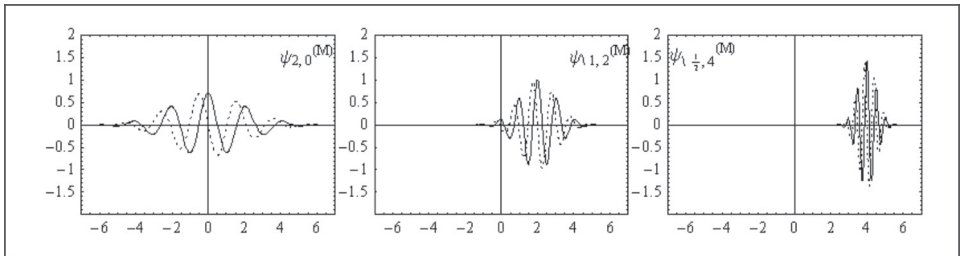
3.1. Falka podstawowa (bazowa, macierzysta, ang. mother wavelet)

Falka-matka jest niewątpliwie najważniejszym elementem analizy falkowej. Musi ona być tak zdefiniowana by spełniać warunek dopuszczalności. Narzuca on fałce oscylacyjny charakter oraz lokalizację, zarówno w częstotliwości jak i czasie. Matematyczny zapis warunku dopuszczalności oraz jego szczegółowe omówienie znajdzie czytelnik w pracach Percivala i Waldena (1993), Valensa (1999), Białasiewicza (2000). Sposób generowania rodziny falek podaje Fortuniak (2004), a ideę (mały fragment) tworzenia bazy przekształcenia falkowego pokazuje rycina 1.

3.2. Ciągła transformata falkowa (ang. CWT, continuous wavelet transform)

Główna idea falkowej transformacji danych ma wiele wspólnego z okienkową transformatą Fouriera w tym sensie, iż wymnaża (koreluje) sygnał $x(t)$ z funkcją okna (falką) i wyznacza transformatę dla każdej wartości sygnału. Zasadnicza różnica tkwi w tym, że falki dają możliwości zastosowania różnorodnych funkcji „okien-spektralnych” o zmiennej szerokości okna, które w zależności od ich rodzaju dobranego do typu procesu czynią analizę niezwykle skuteczną.

Analiza danych pomiarowych – uzyskanych w dyskretnych chwilach zdeterminowanych okresem próbkowania – musi być wykonywana na danych dyskretnych. W konsekwencji CWT musi być również wyznaczana przy użyciu danych dyskretnych (Białasiewicz 2000). Ciągła transformata falkowa szeregu czasowego $x(t)$, będącego zbiorem dyskretnych obserwacji stanowiących realizację procesu fizycznego $X(t)$ opisana jest w pracach Torrence i Compo (1998), Venegasa (2001) i Fortuniaka (2004). Istotnym jest to, że pomimo zdefiniowania i zastosowania ciągłej transformaty falkowej, obliczane przekształcenie nie jest tak naprawdę ciągłe, lecz – jak dostrzec można w powyższej procedurze – jest jej zdyskretyzowaną wersją.



Ryc. 1. Trzy przykładowe elementy rodziny falek powstałe na bazie falki Morleta. Indeksy przy symbolu falki jednoznacznie identyfikują poszczególne falki-córki (ang. daughter wavelets). Pierwsza cyfra określa właściwości skalowe, natomiast druga pozycję w czasie

3.3. Skala a częstotliwość Fouriera

Następna czynność w analizie to ustalenie odpowiedniego planu skalowania, a potem stworzenie na jego podstawie rodziny falek $\psi_{a,b}$. CWT jest kolejnym krokiem, dając dużą dowolność wyboru procesu skalowania i każdorazowo może zostać przeprowadzona inaczej (Polikar 1995). Pomimo faktu, iż CWT sugeruje ciągłą zmianę parametrów a i b , nie ma potrzeby obliczania transformaty dla wszystkich możliwych ich wartości i przyjmuje się skończoną ich liczbę. Powszechnie stosowany, a zarazem najdogodniejszy proces skalowania, to skalowanie logarytmiczne o podstawie logarytmu równej dwa.

$$a_j = a_0 2^{\delta_j} \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (1)$$

$$J = \delta_j^{-1} \log_2 \left(\frac{N\Delta t}{a_0} \right),$$

przy czym J – numer największej skali, a_j – kolejna skala, a_0 – najmniejsza przyjęta skala, δ_j – parametr określający rozdzielczość pomiędzy kolejnymi skalami, zależny od typu falki podstawowej. Dla falki Morleta, $\delta_j = 0,5$ jest wartością, która wciąż zapewnia wystarczające próbkowanie skal (Torrence, Compo 1997).

Mniejsze wartości parametru δ_j dają lepszą rozdzielczość w zakresie skal kosztem wydłużenia czasu obliczeń.

Parametr skali, pojęcie zasadnicze w analizie falkowej, jest w pewnym sensie odpowiednikiem skali używanej w kartografii. Duże wartości skal nawiązują nie do szczegółowego obrazu ale do globalnego widoku, z kolei najniższe poziomy skal dobrze oddają szczegóły obrazu – detale, które w przypadku mapy geograficznej oznaczają szczegóły rzeźby terenu. Dylatacja i kompresja falki podstawowej prowadzą odpowiednio do „szerokich” funkcji bazy, które mogą dobrze korelować z długotrwałymi cechami sygnału, natomiast „wąskie” funkcje bazy są dobrym wykrywaczem stanów krótkotrwałych, tzw. stanów przejściowych procesu.

3.4. Istotność statystyczna i stożek wpływu (ang. COI cone of influence)

Wybór falki Morleta jako falki podstawowej oddaje do dyspozycji część rzeczywistą \Re i urojoną \Im , ponieważ transformata składa się z obydwu tych części. Dostępne są także faza ϕ i moduł $|W|$ transformaty, oraz spektrum mocy $|W|^2$ (Torrence, Compo 1998; Białasiewicz 2000; Venegas 2001):

$$W|(a,b)|^2 \left(\sqrt{[\Re\{W(a,b)\}]^2 + [\Im\{W(a,b)\}]^2} \right) \quad (2)$$

Za istotne statystycznie uważane są te wartości falkowego widma mocy, które po unormowaniu przez wariancję badanego szeregu, są większe od wartości krytycznej dla przyjętego spektrum teoretycznego P_k (Fortuniak 2004).

W przypadku analizy falkowej szczególną rolę odgrywają efekty brzegowe związane z analizą szeregów czasowych o skończonych długościach. Regiony falkowego widma mocy, które szczególnie narażone są na niekorzystny wpływ zarówno zjawisk

brzegowych jak i nadmiarowego próbkowania (redundancji) zdefiniować można dla każdej skali a (Torrence, Compo 1998):

$$\tau_a = \sqrt{2}a \quad (3)$$

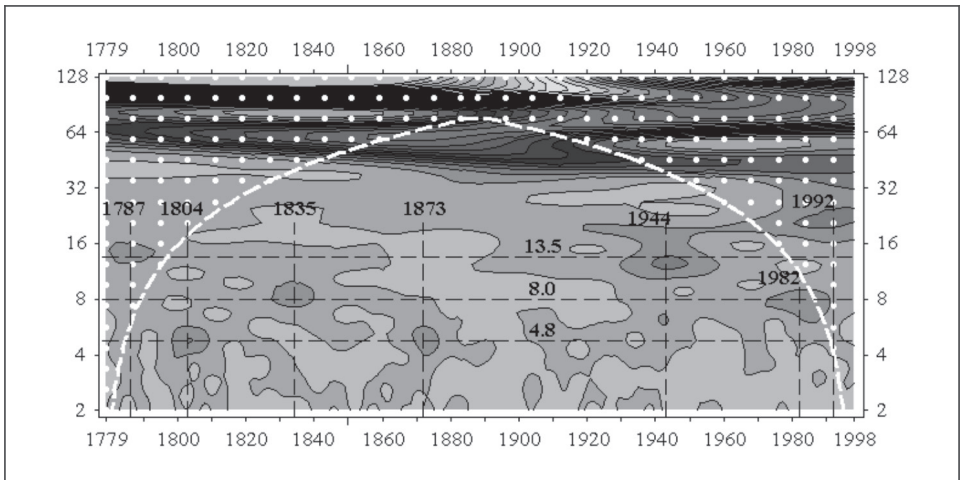
4. Wyniki

Do prezentacji możliwości analizy falkowej wykorzystano rzeczywisty 220-letni szereg czasowy średnich rocznych wartości temperatury powietrza w Warszawie (Lorenc 2000). Wybór padł na ten szereg nieprzypadkowo, gdyż jest to seria o wyjątkowo długim okresie zapisu (1779-1998), próbkowana z krokiem $\Delta t=1$ rok co eliminuje sezonowości, a także ze względu na brak jakiegokolwiek tendencji w jego przebiegu. Wykres szeregu czasowego dostępny jest w pracy Fortuniaka (2004).

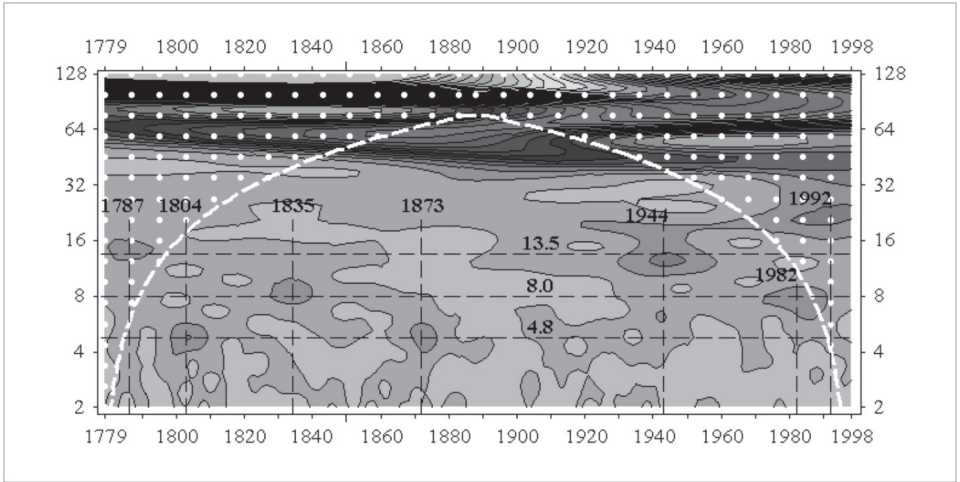
Wyniki analizy falkowej średnich rocznych temperatur w Warszawie pokazane zostały w różnych wariantach ze względu na poziom szczegółowości ujawniania szczegółów transformaty.

Podstawową formą jest wykres warstwiczny falkowego spektrum mocy $|W|^2$ mający zwartą strukturę, niezbędną w początkowym, ogólnym i często ostatecznym etapie analizy (ryc. 2). Na wykres $|W|^2$ nałożony został rejon wpływu COI, w którym istotną rolę na uzyskane wyniki mogą mieć efekty brzegowe, w postaci zakropkowanego pola wyznaczonego na podstawie zależności (3).

Ciekawym uzupełnieniem informacji jest rysunek części rzeczywistej transformaty falkowej \Re (ryc. 3), na podstawie której obliczane jest widmo mocy $|W|^2$. Informacja pochodząca z analizy części rzeczywistej transformaty jest mniej przetworzona, a więc zawiera więcej szczegółów o cykliczności procesu; pozwala mianowicie



Ryc. 2. Warstwiczny wykres falkowego widma mocy $|W|^2$ średnich rocznych temperatur powietrza w Warszawie



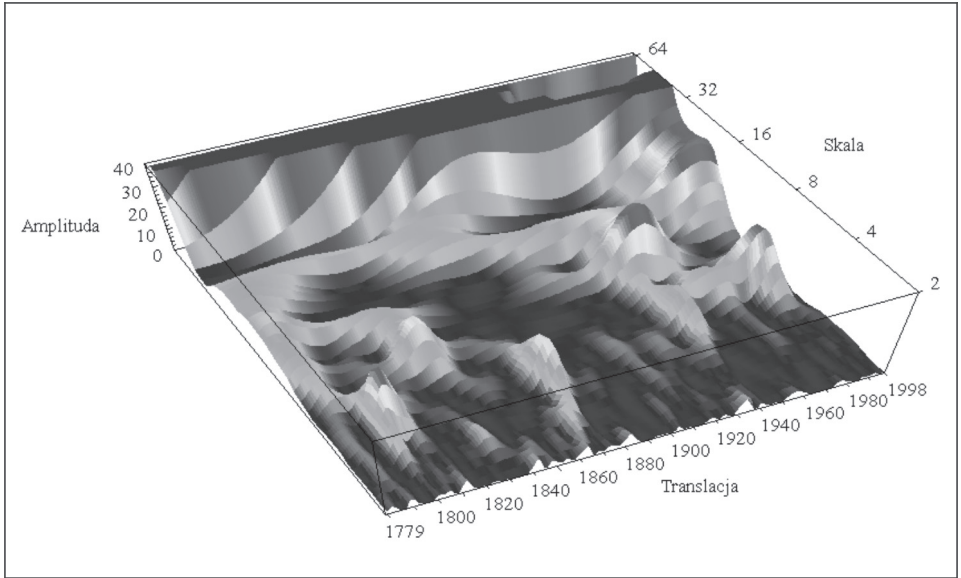
Ryc. 3. Warstwowy wykres części rzeczywistej $\Re\{W(a,b)\}$ transformaty falkowej średniej rocznej temperatury powietrza w Warszawie

lepiej zlokalizować początek i koniec wystąpienia określonej cykliczności, a ponadto ujawnia dodatnie i ujemne półokresy.

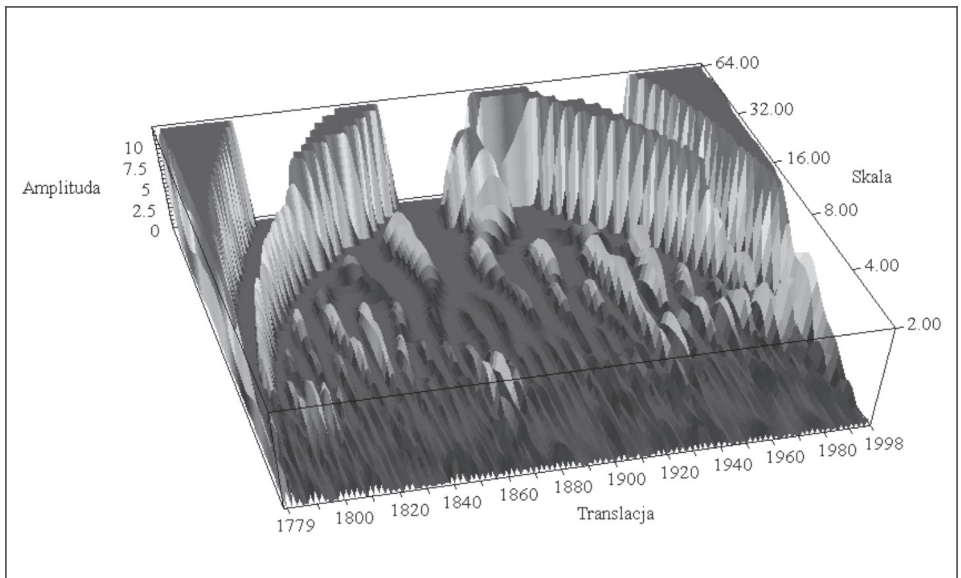
Zarówno warstwowy obraz $|W|^2$ jak i \Re wymagają pewnego doświadczenia w ich interpretacji z tego też względu analiza została wzbogacona o ich trójwymiarowe wersje (3D), które świetnie nadają się do preanalizy (ryc. 4 i ryc. 5).

Charakter średnich rocznych temperatur powietrza (ryc. 2) znamionuje złożoność struktury w postaci kilku pojedynczych, krótkotrwałych i zróżnicowanych amplitudowo impulsów. Brak jest jednej, głównej cykliczności. Ciemne obszary świadczą o istnieniu korelacji pomiędzy danymi, a określoną falką. Im ciemniejszy obszar, tym korelacja silniejsza. Na rysunek naniesiona została pseudosiatka, która ma za zadanie ułatwić zlokalizowanie i opis elementów rycin 2 i 3. Linie poziome odpowiadają wartościom skal, natomiast linie pionowe odcinają na osi czasu te momenty, w których wystąpiło maksimum widma mocy.

Na rycinach 2 i 3 zaznaczone zostało w ten sposób siedem szczegółów widma mocy oraz \Re transformaty falkowej, w zachowaniu których zauważalna jest tendencja do grupowania w pary o wspólnych okresach $a=4,8; 8,0; 13,5$ lat. Pierwszy z nich ($a=4,8$) z maksimum widma w latach 1804 i 1873, każdorazowo trwał ok. 10 lat; drugi 8-letni dłużej obecny w danych, bo w pierwszym przypadku 15 lat, a w drugim 20 lat z maksimami odpowiednio w latach 1835 i 1982. Trzecia para epizodów cykliczności 13,5-letniej jest najbardziej osobliwa. Wyjątkowość jej wynika z faktu, że pierwszy jej składnik, z maksimum w roku 1787 i ok. 15-letnim czasie trwania (jeden cykl) położony jest w regionie wpływu efektów brzegowych i cechuje go znaczne rozmycie wzgórza widma mocy (ryc. 4), natomiast drugi jest zdecydowanie najmocniejszy i najwyraźniejszy z wszystkich opisanych. Obecny jest w latach 1930-1960 z maksimum przypadającym na rok 1944.



Ryc. 4. Znormalizowane widmo mocy $|W|^2$ średnich rocznych temperatur powietrza w Warszawie (3D)



Ryc. 5. Wykres 3D części rzeczywistej $\Re\{W(a,b)\}$ transformaty falkowej średniej rocznej temperatury powietrza w Warszawie

Widoczna jest jeszcze jedna właściwość wykrytych okresów. Ich odległości w parach są zbliżone lub stanowią wielokrotność odległości jednej z nich. I tak, w pierwszym przypadku ($a=4,8$) pomiędzy stwierdzonymi elementami jest 69 lat różnicy, natomiast w drugim ($a=8,0$) 147 lat, a w trzecim ($a=13,5$) 157 lat. Wysłunięcie tezy o rzeczywistości tych różnic byłoby jednakże dość ryzykowne z powodu zbyt krótkiego okresu obserwacji, który nie daje możliwości zweryfikowania tej tendencji w następnych dziesięcioleciach i z pewnością wymaga dalszych analiz.

Ryciny 3 i 5 znakomicie oddają strukturę wyróżnionych okresów. Widoczna jest liczba oscylacji w poszczególnych przypadkach oraz ich dodatnie i ujemne półokresy jako ciemne i jasne wydłużone plamy.

Na ryc. 3 świetnie widoczna jest różnica w charakterze wykrytych cykli. Składnik o okresie 13,5-letnim, którego maksimum przypadło na rok 1787 został poddany silnemu wpływowi wyższych skal oraz efektów brzegowych w postaci łukowych grzbietów ciągnących się od wartości skal $a=64$. Wnioskując tylko na podstawie części rzeczywistej transformaty trudno jest dopatrzeć się takiej cykliczności.

Dla kontrastu na wykresie \Re znacznie wyraźniej i dobitniej zaznaczyła się cykliczność z roku 1982 (maksimum na rysunku $|W|^2$) o okresie 8 lat. W tej wersji jest ona widoczna od roku ok. 1935 i trwa do końca zakresu pomiarowego danych, tj. 1998 roku. Zauważalna jest mała niestabilność okresowości, która w roku 1935 rozpoczyna się od wartości ok. $a=6$ lat, poprzez cykl 8-letni w roku ok. 1970 i aby skrócić cykliczność do 7 letniej na końcu serii pomiarowej.

Pozostał jeszcze jeden aspekt do objaśnienia, który jest tak ważną cechą tej formy prezentacji wyników analizy falkowej. Znaczna czułość na detale powoduje, iż świetnie jest widoczny nieodłączny element niemalże każdej klimatologicznej serii czasowej, składnik który powoduje, że ich analiza jest obarczona niepewnością co do uzyskanych wyników – losowość. Najmocniej swój udział w badanej serii czasowej składnik losowy zaznaczył w zakresie niskich skal – szczególnie w przedziale $a=2-4$. Przejawia się ta obecność w postaci bardzo wąskich, gęsto ułożonych ciemnych paskach rozpoczynających się od wartości $a=2$, wychodzących sporadycznie poza wartość skali $a=4$.

W zakończeniu tej krótkiej analizy powiedzieć trzeba, że w badanej 220-letniej serii czasowej nie stwierdzona została wyraźna cykliczność, która w jednoznaczny sposób rządziłaby przebiegiem średniej rocznej temperatury powietrza w Warszawie. Charakter zmienności tego procesu trafnie odda termin – losowy. Jak widać, nawet tak długa seria czasowa jak na warunki klimatologiczne, nie jest wystarczająco długa, aby dać odpowiedź na pojawiające się pytania.

5. Wnioski

Nawet w tak krótkim opracowaniu widoczny jest ogromny potencjał analityczny falek. Nowoczesny sposób przedstawienia informacji, niejednokrotnie już znanej, o badanym procesie, pozwala zweryfikować posiadaną wiedzę, a co najważniejsze uzupełnia ten jej zakres, który pozostawał w sferze założeń i hipotez. W przedstawionym przykładzie wykryte zostały pewne okresy, które jednak, na podstawie wyników uzyskanych za pomocą falek, nie mogą zostać uznane za charakterystyczne, a jedynie

za krótkotrwałe epizody. W tej samej sytuacji przy zastosowaniu tradycyjnych metod (np. transformaty Fouriera) wykrycie podobnych cykli skutkowałoby uznaniem ich jako charakterystycznych dla całego badanego okresu (np. 220 lat) z powodu braku lokalizacji częstotliwości w czasie.

Spośród zalet analizy falkowej wskazać należy w tym miejscu jeszcze jedną – dość ogólną: podstawowa jej wersja wyznacza ogólne ramy, w których będziemy się poruszać, a to dopiero wybór konkretnej falki matki oraz ustalenie planu skalowo-czasowego stanowi o możliwościach praktycznej analizy, pozostającej w bezpośrednim związku z badanym procesem. Otwiera to nowe możliwości dla klimatologów; po pierwsze umożliwia zweryfikowanie dotychczasowej wiedzy, a po drugie stwarza możliwość wielowątkowego rozpatrzenia badanego zagadnienia.

Literatura

- Białasiewicz J. T., 2000, *Falki i aproksymacje*, WNT, Warszawa.
- Boryczka J., 1998, *Zmiany klimatu ziemi*, Wyd. Akademickie „Dialog”, Warszawa.
- Feliks M., 2001, *Porównanie wybranych metod detekcji cykliczności procesów losowych na przykładzie różnych szeregów czasowych. Część I – obszar czasowy*, Czasop. Techn., Wydawnictwo PK, Kraków.
- Fortuniak K., 1999, *Porównanie wybranych metod weryfikacji domniemanych cykli klimatycznych*, [w:] *Zmiany i zmienność klimatu Polski*, Mat. Ogólnopol. Konf. Nauk., Łódź 4-6 IX 1999, 71-75.
- Fortuniak K., 2004, *Wybrane metody poszukiwania okresowej zmienności w szeregach klimatycznych*, [w:] *Zastosowanie wybranych metod statystycznych w klimatologii*, (niniejszy tom).
- Jeż G., Jokiel P., Kożuchowski K., 1987, *Cykliczne zmiany przepływów w rzekach europejskich na tle wahań opadów atmosferycznych*, Wiad. IMGW, 10 (31), 4, 3-19.
- Kożuchowski K., 1985, *Zmienność opadów atmosferycznych w Polsce w stuleciu 1881-1980*, Acta Geogr. Lodziensia, Wyd. PAN.
- Kożuchowski K., Boryczka J., 1997, *Cykliczne wahania i trendy zmian poziomu morza w Świnoujściu (1811-1990)*, Przeg. Geofiz., 1, 31-48.
- Lorenc H., 2000, *Studia nad 220-letnią serią temperatury powietrza w Warszawie oraz ocena jej wiekowych tendencji*, Mat. Bad. IMGW, seria Meteorologia, 31, 104.
- Percival D. B., Walden A. T., 1993, *Wavelet methods for time series analysis*, Cambridge University Press.
- Polikar R., 1995, *The wavelet tutorial*, Rowan University, Glassboro, New Jersey, adres internetowy: <http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>; data pobrania: 16.06.2004.
- Pruchnicki J., 1999, *W sprawie pojęć dotyczących globalnych zmian klimatu*, Wiad. IMGW, 22 (43), 4, 35-42.
- Rao C.R., 1994, *Statystyka i prawda*, PWN, Warszawa.
- Torrence C., Compo G.P., 1998, *A practical guide to wavelet analysis*, Bull. Amer. Meteor. Soc., 79, 61-78.
- Valens C., 1999, *A really friendly guide to wavelets*, C.valens@mindlees.com
- Venegas S.A., 2001, *Statistical methods for signal detection in climate*, DCESS Report 2,

Danish Center for Earth System Science, Niels Bohr Institute for Astronomy, Physics and Geophysics, University of Copenhagen, Denmark.

Walanus A., 1997, *Szeregi czasowe i wnioskowanie statystyczne w badaniach górnego czwartorzędu*, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, s. Mat-Fiz., 83, Geochronometria 16.

Węglarczyk S., 1998, *Wybrane problemy hydrologii stochastycznej*, Wydawnictwo PK, Kraków.

Węglarczyk S., Feliks M., 2001, *Porównanie wybranych metod detekcji cykliczności procesów losowych na przykładzie różnych szeregów czasowych. Część II – obszar częstotliwościowy*, Czasop. Techn., Wydawnictwo PK, Kraków.

Żmudzka E., 1999, *Krótkookresowa zmienność temperatury powietrza w Polsce*, Przegl. Geof., 3, 115-130.

Maciej Feliks
Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej
Politechnika Krakowska
Kraków